

תרגולים התפלגות נורמלית

1. משקלם של תושבי העיר מתפלג נורמלית עם של 70 ק"ג וסטטיית תקן של 8 ק"ג. בבניין רב קומות מותקנת מעלית המיועדת לשאת 10 אנשים. העומס שהמעלית יכולה לשאת הוא 800 ק"ג. מה ההסתברות שהמעלית תעמוד בעומס אם ייכנסו למעלית 10 אנשים במשקל ממוצע?

2. חנות תכשיטים מוכרת תליון מיוחד שעוצב על ידי אמן מפורסם. מניסיון, ידוע כי 30% מהלקוחות הנכנסים לחנות קונים את התליון הזה. במהלך חודש ביקרו בחנות 800 לקוחות. מהי ההסתברות המשוערת שנרכשו בין 210 ל-220 תליונים באותו חודש?

3. במאפייה מקומית, התפלגות המשקל של כיכרות הלחם שהם מספקים היא נורמלית עם ממוצע של 500 גרם ושוונות של 400 גרם². במאפייה יודעים שכאשר פקחי משרד הבריאות נמצאים במקום, הם צריכים למכור רק כיכרות לחם ששוקלות לא פחות מ-470 גרם אך גם אינן עולות על 490 גרם. איזה אחוז מכיכרות הלחם הקיימות עומדות בדרישה זו?

4. בחנות ממתקים, משקל של שקיות שעועית גילי מתפלג נורמלית עם ממוצע של 200 גרם ושוונות של 100 גרם². בחנות יודעים שכאשר נוכחים פקחי בטיחות המזון, הם צריכים למכור רק שקיות של שעועית גילי שמשקלם לא פחות מ-180 גרם אך גם אינו עולה על 215 גרם. איזה אחוז מהשקיות הקיימות של שעועית גילי עומדות בדרישה זו?

5. בבחינה ארצית בכימיה, הציונים מתפלגים נורמלית עם ממוצע 75 וסטטיית תקן 12. נקבע כי רק תלמידים שנמצאים ב-5% העליונים יוכלו להתקבל. יוסי ניגש לבחינה וקיבל 85, האם הוא יתקבל?

6. חברה המייצרת סוללות טוענת שהסוללות שלהן מחזיקות מעמד 500 שעות בממוצע, בסטיית תקן של 50 שעות. הנח שתוחלת החיים של הסוללות מתפלגת נורמלית.

א. מהי ההסתברות שסוללה שנבחרה באקראי תחזיק יותר מ-623 שעות?

ב. החברה מציגה דגם סוללה חדש אשר לטענתה הוא מגדיל את אורך החיים הממוצע של הסוללות לכ-650 שעות. כדי לבדוק טענה זו, הם מפעילים את הסוללה החדשה ברציפות ומתעדים את הזמן שלוקח להתרוקן לחלוטין. אם הסוללה החדשה מחזיקה מעמד למשך פחות מ-580 שעות, הם מחליטים לא לשווק אותה. מה הסיכוי לא לשווק את הסוללה החדשה? הנח שסטטיית התקן נשארה זהה.

ג. החברה קיבלה הזמנה גדולה לסוללות שיכולות להחזיק לפחות 520 שעות. הם מחליטים למלא את הצו הזה באמצעות דגם הסוללה החדש. מהי ההסתברות שסוללה שנבחרה באקראי מהמשלוח לא תעמוד בדרישת 520 השעות?

ד. החברה מעוניינת לתת ערובה ללקוחותיה שדגם הסוללה החדש יחזיק מעמד לפחות 450 שעות. אם הם רוצים שההסתברות שסוללה תכשל לפני הזמן המובטח תהיה פחות מ-0.01, מה אמור להיות אורך החיים המינימלי של הסוללות? נניח שסטטיית התקן נשארה זהה.

פתרונות

1. מדובר בטרנספורמציה ליניארית של הכפלה בקבוע (הכפלה ב10) ועל כן ציון התקן שיחושב על

מנת לבדוק את ההסתברות הוא: $Z = \frac{800-700}{80} = 1.25$. לפיכך, הסיכוי שהמעלית לא תעמוד

בעומס הוא: $P(x > 1.25) = 0.1056$ או 10.56%.

2. אם הגיעו 800 לקוחות, התוחלת תהיה $800 * 0.3 = 240$ וסטיית התקן תהיה:

$\sqrt{800 * 0.3 * 0.7} = 12.96$. מכאן הפתרון הוא דיי פשוט: מחשבים ציון תקן ומוצאים

הסתברות. $Z_{210} = \frac{210-240}{12.96} = -2.31$ באותו האופן $Z_{220} = \frac{220-240}{12.96} = -1.54$. לפיכך

$P(-1.54 < Z < -2.31) = 0.0513$ או 5.13%.

3. ציון התקן של כיכרות הלחם ששוקלות 470 גרם הוא: $Z_{470} = \frac{470-500}{\sqrt{400}} = -1.5$.

של אלו ששוקלות 490 גרם הוא: $Z_{490} = \frac{490-500}{\sqrt{400}} = -0.5$.

לפיכך אחוז הכיכרות לחם אשר עומדות בדרישה זו יהיה: $P(-1.5 < Z < -0.5) = 0.2417$

או 24.17%.

4. ראשית נמצא את ציוני התקן של כל משקל:

$Z_{180} = \frac{180-200}{\sqrt{100}} = -2$; $Z_{215} = \frac{215-200}{\sqrt{100}} = 1.5$

בין שני משקלים אלה. נעשה זאת על ידי החסרת הסיכוי למצוא שקית ששוקלת עד 1.5 סטיות

תקן מעל הממוצע בסיכוי למצוא שקית ששוקלת עד 2 סטיות תקן מתחת לממוצע:

$$P(-2 < Z < 1.5) = \phi(1.5) - \phi(-2) = 0.9332 - 0.0228 = 0.9104$$

5. אילו רק 5% העליונים מתקבלים, משמעות הדבר היא שרק מי שנמצא 1.645 סטיות תקן מעל

הממוצע ומעלה מתקבל. בכדי לדעת האם יוסי התקבל או לא, יהיה עלינו לחשב את ציון התקן

שלו ולהשוות לקריטריון קבלה: $Z_{יוסי} = \frac{85-75}{12} = 1.2 < 1.645$. כפי שניתן לראות, ציון התקן

של יוסי **נמוך** מקריטריון הקבלה ועל כן לא יתקבל לתוכנית.

6. א. כמו תמיד, בשביל למצוא את ההסתברות נצטרך להמיר מציון הגלם (אורך החיים) לציון

התקן: $Z_{623} = \frac{623-500}{50} = 2.46$. כעת, לפי טבלת Z הסיכוי למצוא נורה שתאריך חיים יותר

מ623 שעות הוא: $P(Z > 2.46) = 1 - \phi(2.46) = 0.0069$ או 0.69%. כלומר, 0.69% מהנורות

מאריכות חיים יותר מ623 שעות.

ב. ראשית עלינו לחשב את ציון התקן של הסוללה החדשה: $Z_{580} = \frac{580-650}{50} = -1.4$. כעת, לפי

טבלת זד: $P(Z < -1.4) = 1 - \phi(1.4) = 0.0808$. לפיכך, הסיכוי שהם יחליטו לא לשווק את

הסוללה החדשה הוא 0.0808 או 8.08%.

ג. ציון התקן של הדרישה החדשה הוא $Z_{520} = \frac{520-650}{50} = -2.6$ לכן, הסיכוי שהסוללה לא

תעמוד בדרישה הוא: $P(Z < -2.6) = 1 - \phi(2.6) = .0047$. לפיכך, הסיכוי שהסוללה

החדשה לא תעמוד בדרישה הוא 0.0047 או 0.47%.

ד. כאן למעשה במילים אחרות דורשים מאיתנו את ציון הגלם של האחוז התחתון של ההתפלגות

כאשר התוחלת היא 480 וסטיית התקן היא 50. לפי טבלת Z , ציון התקן של ערך זה הוא עבור

שטח מצטבר של 99%, כלומר -2.33 (מינוס מכיוון שמחפשים את האחוז התחתון). כעת, נציב

בנוסחת Z , נעביר אגפים ונחשב: $Z = \frac{x-480}{50} = -2.33 \rightarrow x = -2.33 * 50 + 480 = 363.5$

זאת אומרת, אורך החיים המינימלי של סוללה לפי דרישות השאלה הוא 363.5 שעות.